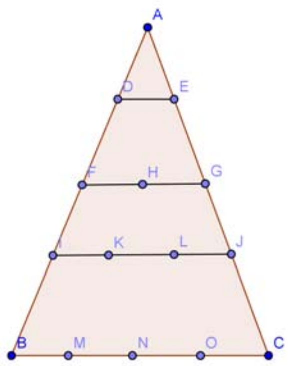
SUCESIONES. PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

Breve reseña histórica:

Los pitagóricos llamaban triangulares a los números 3, 6, 10, 15, ... en consonancia con la construcción que aparece en la figura. Se trata de un primer ejemplo de progresión aritmética.



Por otra parte, Euclides, en el libro IX de su obra "Los Elementos" habla de magnitudes "sucesivamente proporcionales" y nos dice que dado un conjunto de números a, b, c, d... son sucesivamente proporcionales si :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = ...$$

La aportación de Euclides a las progresiones geométricas consiste en una definición indirecta de ellas y la obtención de una expresión para hallar la suma de sus términos .

Definición de sucesión:

Sucesión: se llama sucesión de números reales a un conjunto de términos ordenados, de tal manera que cumplen una regla determinada. Se nombran con una letra y un subíndice

Término General: se llama término general a la regla que sigue la sucesión.

Índice: se llama índice de un término a la posición que ocupa en la sucesión.

Representación en el plano:

Para representar una sucesión en el plano vamos a poner los índices en el eje X y los términos en el eje Y, es decir, los puntos serían (n, a_n)

Progresión aritmética:

Una progresión aritmética es un caso particular de las sucesiones en la que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

$$a_n - a_{n-1} = d$$
$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Si conocemos dos términos cualesquiera de una progresión aritmética podemos encontrar todos los demás de la siguiente manera:

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

Interpolar medios diferenciales: intercalar un número m de términos entre dos conocidos, de modo que todos ellos formen una progresión aritmética se llama interpolar; y a los m términos interpolados se les llama medios diferenciales.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m+1}$$

Se puede calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética con la siguiente formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n$$

Progresión geométrica:

Una progresión geométrica es otro caso particular de las sucesiones en la que el cociente o la razón entre dos términos consecutivos es constante.

$$a_n = a_{n-1} r$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Si conocemos dos términos cualesquiera de una progresión geométrica podemos encontrar todos los demás de la siguiente manera:

$$a_n = a_k r^{n-k}$$

Interpolar medios proporcionales: Intercalar un número m de términos entre dos conocidos, de modo que todos ellos formen una progresión geométrica se llama interpolar; y a los m términos interpolados se les llama medios proporcionales.

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Producto de los n primeros términos de una sucesión geométrica:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

En las progresiones geométricas con -1 < r < 1, podemos calcular la suma de infinitos términos ya que éstos llegan a hacerse tan pequeños que son prácticamente cero.

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa conocido por Fibonacci, hijo de Bonacci, apodo de su padre, era italiano y vivió entre los s. XII y XIII

1, 1, 2, 3, 5, 8,...

Imagina una pareja especial de liebres que pueden reproducirse cuando tienen 2 meses pero no antes. Imagina que cada mes, desde que son maduros (a los 2 meses), tienen una pareja de hijos siempre macho y hembra. Si partiéramos de una sóla pareja de liebres jóvenes, ¿cuántas parejas tendremos al comienzo de cada uno de los meses siguientes?

Propiedades:

Si dividimos cada número de la sucesión entre el anterior cada vez se parecen más al **número de oro** $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

La sucesión de Fibonacci es muy frecuente en la Naturaleza: por ejemplo, tienen tendencia a aparecer cuando contamos las espirales que forman las escamas de la piña cuando la miras por abajo, las pipas de girasol también giran en espirales cuyo número es uno de los de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci también aparece en el arte: construyendo rectángulos como en la escena (ver aplicaciones interactivas), se construye una espiral que es muy parecida a la espiral áurea o logarítmica. Los rectángulos que se van construyendo se parecen cada vez más al un rectángulo áureo.

En "el hombre ideal", Leonardo da Vinci estableció lo que consideró las proporciones humanas más perfectas. La relación entre algunas de las medidas principales del cuerpo humano es la áurea.

Aplicaciones:

Calcular la fracción generatriz de números decimales periódicos:

Periódicos puros.

$$0,\widehat{5} = 0,555.... = 0,5 + 0,05 + 0,005 + ... = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + ...$$

Suma de una progresión geométrica con $a_1 = \frac{5}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$

$$S = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

Periódicos mixtos.

$$0,234\widehat{5} = 0,2345555... = 0,234 + 0,0005 + 0,00005 + ... = \frac{234}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{5}{100000} + ...$$

Suma de una progresión geométrica con $a_1 = \frac{5}{10000}$ y $r = \frac{1}{10}$

$$S = \frac{\frac{5}{10000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9000}$$

$$0,234\widehat{5} = \frac{234}{1000} + \frac{5}{9000} = \frac{234 \cdot 9 + 5}{9000} = \frac{2111}{9000}$$

Interés simple y compuesto:

Disponemos de un capital C y lo depositamos en un banco que le da un tanto por cierto anual de intereses y podemos optar por la capitalización o no de los intereses.

Interés simple:

- Al cabo de un año el capital será C + CI
- Al cabo de dos años será C + CI +CI = C + 2CI

...

- Al cabo de n años será C + nCI

Por tanto se trata de una sucesión aritmética de primer término C y razón CI

$$a_n = C + CI + (n-1)CI = C + nCI$$

Interés compuesto:

- Al cabo de un año el capital será C + CI = C(1 + I)
- Al cabo de dos años será C(1 + I) = C(1 + I) + C(1 + I)I = $C(1 + I)^2$

...

- Al cabo de n años será $C(1 + I)^n$

Por tanto se trata de una sucesión geométrica de primer término C(1 + I) y razón (1 + I)

$$a_n = C(1+I)(1+I)^{n-1} = C(1+I)^n$$

Límite de sucesiones

Una sucesión tiene límite, si sus términos van tomando valores cada vez más próximos a una cierta cantidad que llamamos límite de la sucesión.

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Sucesiones no convergentes

$a_n = (-1)^n$ para cualquier valor de n oscila entre -1 y 1

$a_n = 3n$ crece indefinidamente