EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS (GEOMETRÍA ANALÍTICA)

1.- Halla las coordenadas del punto simétrico $P=(1,2,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x+2y+z-7=0$.

2.- Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (-1,2,1).

3.- Sean los puntos A(2,3,0) y B(-2,1,4).

Determinar:

a) Ecuación del plano π mediatriz del segmento *AB*

b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados

c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen

Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

4.- Sea el plano π de ecuación $x-5y+z+3=0$ y sean *r* y *s* las rectas con ecuaciones

$$r: x-3=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3}; \qquad s: \frac{x+1}{2}=y=z+2$$

Determinar:

a) Los puntos de intersección del plano π con cada una de las dos rectas.

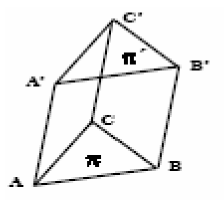
b) El área y perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenadas.

5.- Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con A(-1,1,0), B(1,0,-1), C(0,1,-1) y A'(1,-1,α). Calcula:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

b) El valor de α para que el plano π', que contiene los puntos A', B' y C', diste una unidad del plano π.

c) Para α =1 el plano π' y el volumen del prisma.

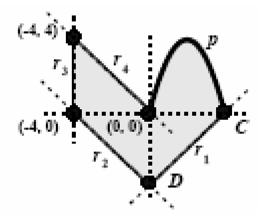


6.- Calcula:

a) El punto C de la figura, punto de corte de la parábola $p: y = 4-(x-2)^2$ y el eje de abcisas.

b) El punto D y la ecuación de la recta r_2 paralela a r_4.

c) El área sombreada, limitada por la parábola p y las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4.



7.- Dadas $\frac{x-a}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ y $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$, calcular el valor de a de tal manera que las rectas se cortan. Determinar el punto de corte.

8.- Calcula los puntos de la recta $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ que equidistan de los planos $3x+4y=1$ y $4x-3z=1$.

9.-
a) ¿Están alineados los puntos A(1,0,-1), B(-1,1,2) y C(3,0,1)? Justificar la respuesta.

b) En caso afirmativo determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

10.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto A(0,-2,4) y a la recta de ecuación:

$$\frac{x+1}{2}=y-3=\frac{z+2}{-2}$$

11.- Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z = 3 \\ y+4z = 5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x-y+2z=1$. Se pide:

a) Comprueba que *r* y π son paralelos.
b) Calcula la distancia entre *r* y π
c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en π y sean paralelas a *r*.

12.- Considera los puntos A(2,0,0), B(0,2,0), C(2,2,1) y D(1,1,2) y calcula:

a) El volumen del tetraedro que determinan.
b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A, B, C.

13.- Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$

a) Escríbase la recta en forma paramétrica.
b) Para cada punto P de r, determínese la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ.

14.- Determínese si el plano $\pi \equiv 2x+3y-4=0$ corta o no al segmento de extremos A(2,1,3) y B(3,2,1).

15.- Hállese la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x=y=z$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y-z-1=0$.

16.- Consideramos los puntos del espacio $A(1,1,0),\ B(0,1,2)\ y\ C(-1,2,1)$. Nos dicen que estos tres puntos forman parte del conjunto de soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Se pide:

a) ¿Están alineados estos puntos?
b) ¿Podemos averiguar el rango de la matriz asociada al sistema de ecuaciones?

Razona adecuadamente las respuestas.

17.- Tenemos cuatro puntos en el espacio: $A(0,0,0);\ B(0,0,2);\ C(0,2,0)\ y\ D(2,0,0)$. Se pide:

a) Representa gráficamente los cuatro puntos.
b) Calcula el volumen del tetraedro ABCD.
c) Halla la ecuación del plano B, C y D.

Calcula la distancia del origen al plano del apartado anterior.

18.-

A. Distancia entre dos rectas que se cruzan.
B. Halle la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1 \\ z=1-\alpha \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=1+\beta \\ y=2 \\ z=2\beta \end{cases}$$

19.-

A. Ángulo que forman dos rectas. Condición de perpendicularidad.
B. Determine el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos A = (1,0,-1) y B = (0,1,-2) y la recta de ecuación: $x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

20.- Una recta pasa por el punto (1,-1,0) y es paralela a los planos:

$$x+y=1, \quad x+z=1$$

Halla sus ecuaciones.

21.- Dada la recta

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

y el plano

$$\pi \equiv x + 3y - 3z = 3,$$

calcula:

(a) El plano que contiene a r y es perpendicular a π.
(b) El volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

22.- Se consideran la recta y los planos siguientes

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} ; \ \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \ ; \ \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

23.- Se pide:

a) Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.
b) Determinar la posición relativa de los dos planos.
c) Calcular la distancia de r a π_2.

24.-

a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + kz = 3$$
$$\pi_2 \equiv x + ky - z = -1$$
$$\pi_3 \equiv 3x + y - 3z = -k$$

b) En los casos en los que los tres planos anteriores se corten en una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

25.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$ e1=(1,1,2), e2=(2,5,1), e3=(0,1,1) y e4=(-1,1,0), encontrar tres de ellos que formen una base de $\mathbb{R}^3$ y escribir el otro como combinación lineal de esa base.

26.-
a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta l dada por la intersección de los planos:

$$\pi_1 : x + y - z - 1 = 0 \quad y \quad \pi_2 : 2x - y + z = 0.$$

b) Encontrar la distancia del punto (1,0,1) a dicha recta.

27.-

a) Demostrar que las rectas:

$$l_1 = \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad l_2 = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

se cruzan en el espacio.

b) Encontrar la distancia entre dichas rectas.

28.- Halla el ángulo que forma la recta intersección de los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y - 3 = 0 \\ \pi_2 \equiv 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + y + z + 4 = 0$.

29.- Encuentra la ecuación implícita del plano que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ y es paralelo a la recta intersección de los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + y + 2z = 4 \\ \pi_2 \equiv x - y - z = 0 \end{cases}$$

30.- Sean A y B los puntos del espacio de coordenadas A = (0,1,2), B = (1,2,3). Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dichos puntos.

¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C de coordenadas C = (3, r + s, r - s) pertenezca a la recta calculada antes? En caso afirmativo calcular los valores de r y s. Razonar la contestación en caso negativo.

31.- Sea r la recta que pasa por el punto P = (0,1,0) y que tiene a v = (1,1,-1) como vector de dirección.
Se considera también el plano de ecuación

$$-x + 2y + z + A = 0$$

Estudiar la posición relativa de la recta y del plano en función de A.

32.- Dados los planos

$\pi_1 : x + y + z = -5,\ \pi_2 : x - 3y - z = 3\ \ y\ la\ recta\ r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2},$ se pide:

a) Determinar razonadamente la posición de la recta r y la recta s intersección de los planos π_1 y π_2.

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralelo a r.

33.- Se consideran la recta
$r:(x,y,z)=(t+1,2t,3t)$, *el plano* $\pi: x-2y-z=0$ *y el punto* $P=(1,1,1)$. *Se pide*:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo a π.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2.

34.- Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas (1,0,0), (0,1,1) y (1,2,0). Determinar la distancia del punto (2,1,1) a dicho plano.

35.- ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones $ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d'$ de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

36.- Considera la recta y el plano siguientes:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z+3}{4} \qquad \pi: 2x+4y+4z=5$$

a) Justifica por qué la recta r y el plano π son paralelos.
b) Calcula la distancia entre el plano π y la recta r.
c) Calcula la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r.

37.- Se considera la recta $r\equiv\begin{cases}x+2y=7\\ y+2z=4\end{cases}$ y el punto $P=(1,2,3)$.

a) Calcula la ecuación paramétrica del plano π que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P.

b) Considera la recta: $s\equiv\begin{cases}x=1\\ y=2+\alpha\\ z=3+2\alpha\end{cases}$

¿Cuál es la posición relativa entre la recta s y el plano π?

c) Calcula cuáles son las coordenadas del punto Q de la recta s que está más próximo a la recta r. Justifica tu respuesta.