

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS (GEOMETRÍA ANALÍTICA)

1.- Halla las coordenadas del punto simétrico  $P = (1, 2, -2)$  respecto al plano de ecuación  $3x + 2y + z - 7 = 0$ .

2.- Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es  $(-1, 2, 1)$ .

3.- Sean los puntos  $A(2, 3, 0)$  y  $B(-2, 1, 4)$ .

Determinar:

- Ecuación del plano  $\pi$  mediatriz del segmento  $AB$
- El volumen del tetraedro formado por  $\pi$  y los tres planos coordenados
- Ecuación de la recta perpendicular al plano  $\pi$  que pasa por el origen

**Nota:** El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

4.- Sea el plano  $\pi$  de ecuación  $x - 5y + z + 3 = 0$  y sean  $r$  y  $s$  las rectas con ecuaciones

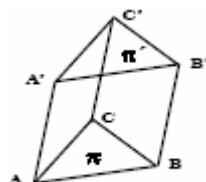
$$r: x - 3 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{3}; \quad s: \frac{x + 1}{2} = y = z + 2$$

Determinar:

- Los puntos de intersección del plano  $\pi$  con cada una de las dos rectas.
- El área y perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenadas.

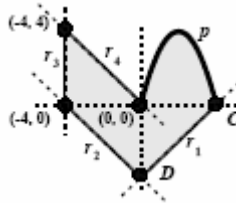
5.- Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con  $A(-1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, -1)$ ,  $C(0, 1, -1)$  y  $A'(1, -1, \alpha)$ . Calcula:

- La ecuación del plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- El valor de  $\alpha$  para que el plano  $\pi'$ , que contiene los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ , diste una unidad del plano  $\pi$ .
- Para  $\alpha = 1$  el plano  $\pi'$  y el volumen del prisma.



6.- Calcula:

- El punto C de la figura, punto de corte de la parábola  $p : y = 4 - (x - 2)^2$  y el eje de abscisas.
- El punto D y la ecuación de la recta  $r_2$  paralela a  $r_4$ .
- El área sombreada, limitada por la parábola p y las rectas  $r_1, r_2, r_3$  y  $r_4$ .



7.- Dadas  $\frac{x-a}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$  y  $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$ , calcular el valor de a de tal manera que las rectas se cortan. Determinar el punto de corte.

8.- Calcula los puntos de la recta  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$  que equidistan de los planos  $3x+4y=1$  y  $4x-3z=1$ .

9.-

- ¿Están alineados los puntos A(1,0,-1), B(-1,1,2) y C(3,0,1)? Justificar la respuesta.
- En caso afirmativo determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

10.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto A(0,-2,4) y a la recta de ecuación:

$$\frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{z+2}{-2}$$

11.- Se considera la recta  $r \equiv \begin{cases} x+2z = 3 \\ y+4z = 5 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv 3x - y + 2z = 1$ . Se pide:

- Comprueba que  $r$  y  $\pi$  son paralelos.
- Calcula la distancia entre  $r$  y  $\pi$
- Determina dos rectas distintas que estén contenidas en  $\pi$  y sean paralelas a  $r$ .

12.- Considera los puntos A(2,0,0), B(0,2,0), C(2,2,1) y D(1,1,2) y calcula:

- El volumen del tetraedro que determinan.
- La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A, B, C.

13.- Sea la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$

- Escribase la recta en forma paramétrica.
- Para cada punto P de r, determínese la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ.

14.- Determínese si el plano  $\pi \equiv 2x + 3y - 4 = 0$  corta o no al segmento de extremos A(2,1,3) y B(3,2,1).

15.- Hállese la ecuación del plano que contiene a la recta  $r \equiv x = y = z$  y es perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$ .

16.- Consideramos los puntos del espacio A(1,1,0), B(0,1,2) y C(-1,2,1). Nos dicen que estos tres puntos forman parte del conjunto de soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Se pide:

- ¿Están alineados estos puntos?
- ¿Podemos averiguar el rango de la matriz asociada al sistema de ecuaciones?

Razona adecuadamente las respuestas.

17.- Tenemos cuatro puntos en el espacio: A(0,0,0); B(0,0,2); C(0,2,0) y D(2,0,0). Se pide:

- Representa gráficamente los cuatro puntos.
- Calcula el volumen del tetraedro ABCD.
- Halla la ecuación del plano B, C y D.

Calcula la distancia del origen al plano del apartado anterior.

18.-

- Distancia entre dos rectas que se cruzan.
- Halle la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

$$r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 \\ z = 2\beta \end{cases}$$

19.-

- Ángulo que forman dos rectas. Condición de perpendicularidad.
- Determine el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos A = (1,0,-1) y B =

$$(0,1,-2) \text{ y la recta de ecuación: } x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

20.- Una recta pasa por el punto (1,-1,0) y es paralela a los planos:

$$x + y = 1, \quad x + z = 1$$

Halla sus ecuaciones.

21.- Dada la recta

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

y el plano

$$\pi \equiv x + 3y - 3z = 3,$$

calcula:

- (a) El plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .
- (b) El volumen del tetraedro determinado por el plano  $\pi$  y los planos coordenados.

22.- Se consideran la recta y los planos siguientes

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}; \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0; \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

23.- Se pide:

- a) Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.
- b) Determinar la posición relativa de los dos planos.
- c) Calcular la distancia de  $r$  a  $\pi_2$ .

24.-

- a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro  $k$ :

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + kz = 3$$

$$\pi_2 \equiv x + ky - z = -1$$

$$\pi_3 \equiv 3x + y - 3z = -k$$

- b) En los casos en los que los tres planos anteriores se corten en una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

25.- Dados los vectores de  $\mathbb{R}^3$   $e_1=(1,1,2)$ ,  $e_2=(2,5,1)$ ,  $e_3=(0,1,1)$  y  $e_4=(-1,1,0)$ , encontrar tres de ellos que formen una base de  $\mathbb{R}^3$  y escribir el otro como combinación lineal de esa base.

26.-

- a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta  $l$  dada por la intersección de los planos:

$$\pi_1 : x + y - z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 2x - y + z = 0.$$

- b) Encontrar la distancia del punto  $(1,0,1)$  a dicha recta.

27.-

a) Demostrar que las rectas:

$$l_1 = \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

se cruzan en el espacio.

b) Encontrar la distancia entre dichas rectas.

28.- Halla el ángulo que forma la recta intersección de los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y - 3 = 0 \\ \pi_2 \equiv 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

con el plano  $\pi \equiv 2x + y + z + 4 = 0$ .

29.- Encuentra la ecuación implícita del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ y es paralelo a la recta intersección de los planos}$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + y + 2z = 4 \\ \pi_2 \equiv x - y - z = 0 \end{cases}$$

30.- Sean A y B los puntos del espacio de coordenadas A = (0,1,2), B = (1,2,3). Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dichos puntos.

¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C de coordenadas C = (3, r + s, r - s) pertenezca a la recta calculada antes? En caso afirmativo calcular los valores de r y s. Razonar la contestación en caso negativo.

31.- Sea r la recta que pasa por el punto P = (0,1,0) y que tiene a v = (1,1,-1) como vector de dirección.

Se considera también el plano de ecuación

$$-x + 2y + z + A = 0$$

Estudiar la posición relativa de la recta y del plano en función de A.

32.- Dados los planos

$$\pi_1 : x + y + z = -5, \pi_2 : x - 3y - z = 3 \text{ y la recta } r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}, \text{ se pide:}$$

- Determinar razonadamente la posición de la recta r y la recta s intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .
- Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralelo a r.

33.- Se consideran la recta

$r : (x, y, z) = (t+1, 2t, 3t)$ , el plano  $\pi : x - 2y - z = 0$  y el punto  $P = (1, 1, 1)$ . Se pide :

- Determinar la ecuación del plano  $\pi_1$  que pasa por el punto P y es paralelo a  $\pi$ .
- Determinar la ecuación del plano  $\pi_2$  que contiene a la recta r y pasa por el punto P.
- Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

34.- Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas (1,0,0), (0,1,1) y (1,2,0). Determinar la distancia del punto (2,1,1) a dicho plano.

35.- ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones

$ax + by + cz = d$ ,  $a'x + b'y + c'z = d'$  de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

36.- Considera la recta y el plano siguientes:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4} \quad \pi : 2x + 4y + 4z = 5$$

- Justifica por qué la recta r y el plano  $\pi$  son paralelos.
- Calcula la distancia entre el plano  $\pi$  y la recta r.
- Calcula la ecuación implícita del plano  $\pi'$  que es perpendicular a  $\pi$  y contiene a r.

37.- Se considera la recta  $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$  y el punto  $P = (1, 2, 3)$ .

- Calcula la ecuación paramétrica del plano  $\pi$  que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P.

b) Considera la recta:  $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}$

¿Cuál es la posición relativa entre la recta s y el plano  $\pi$ ?

- Calcula cuáles son las coordenadas del punto Q de la recta s que está más próximo a la recta r. Justifica tu respuesta.