SISTEMAS DE ECUACIONES

Ecuación lineal: expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, donde $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ son números reales denominados coeficientes, el número real b es el término independiente y $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ son las incógnitas.

La solución es el conjunto de valores $s_1,\ s_2,\ ...,\ s_n$ que transforman la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ en un identidad $a_1s_1 + a_2s_2 + ... + a_ns_n = b$.

Ecuaciones lineales equivalentes: dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones ⇔ tienen sus coeficientes proporcionales**.**

Sistema de ecuaciones lineales: conjunto de dos o más ecuaciones lineales que deben verificarse simultáneamente.
La solución del sistema son los valores $s_1,\ s_2,\ ...,\ s_n$ que transforman a la vez todas las ecuaciones en identidades.

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos: son aquellos que tienen nulos todos los términos independientes.

Sistemas de ecuaciones equivalentes: son aquellos que tienen las mismas soluciones.
Transformaciones para obtener un sistema equivalente:

- Multiplicar o dividir una ecuación del sistema por un número real distinto de cero.
- Sustituir una ecuación del sistema por la suma o resta de ésta con otras ecuaciones del mismo.
- Sustituir la expresión resultante de despejar una de las incógnitas del sistema en las demás ecuaciones del mismo.
- Suprimir en el sistema las ecuaciones que sean combinación lineal de las otras.

Clasificación de los sistemas por su solución:

- Sistema compatible determinado: solución única.
- Sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
- Sistema incompatible: no tiene solución.

Teorema de Rouché-Frobenius: (Discusión de un sistema)

Dado un sistema de m ecuaciones y n incógnitas: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ matriz\ de\ los\ coeficientes,\ A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vdots b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \vdots b_m \end{pmatrix} \ matriz\ ampliada,\ n = n^o\ de\ incógnitas.$$

.

- Si Rg(A)=Rg(A^*)=n, el sistema es compatible determinado.
- Si Rg(A)= Rg(A^*)<n, el sistema es compatible indeterminado con n-Rg(A) indeterminaciones.
- Si Rg(A) ≠ Rg(A^*), el sistema es incompatible.

En los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos: $\begin{cases} Si\ \ Rg(A) = Rg(A^*) = n \Rightarrow SCD\ \ (solución\ \ nula) \\ Si\ \ Rg(A) = Rg(A^*) < n \Rightarrow SCI\ \ (\inf initas\ \ soluciones) \end{cases}$

Método de Gauss: (Resolución de un sistema)

- Un sistema escalonado es aquel el que cada ecuación tiene una ecuación menos que la anterior.
- El método de Gauss consiste en transformar un sistema en otro equivalente que sea escalonado.

Regla de Cramer: (Resolución de un sistema) Se aplica a los sistemas que tienen el mismo nº de ecuaciones que de incógnitas y además la matriz de coeficientes del sistema cumple $|A| \neq 0$ (Sistema compatible determinado).

$x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, siendo $|A_i|$ el determinante que se obtiene al sustituir la columna de los coeficientes de la incógnita x_i por la de términos independientes en el determinante $|A|$.