RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO. ÁREAS Y VOLÚMENES. SUPERFICIE ESFÉRICA.

Ecuaciones de la recta: dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$Paramétricas: \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad Continuas: \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \quad General: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$ con

$$Rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$ (intersección de dos planos)

Ecuaciones del plano: dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores directores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$Paramétricas: \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases} \quad General: \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - x_0 \\ u_2 & v_2 & y - y_0 \\ u_3 & v_3 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Un plano viene determinado por tres puntos no alineados A, B y C no alineados: tomamos un punto (ej. A) y como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB}$

Posiciones relativas:

- **De dos planos:**

$$\pi_1 \ y \ \pi_2: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \ y \ A^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = Rg(A^*) = 2 \ Secaantes \\ Rg(A) = 1 < Rg(A^*) = 2 \ Paralelos \\ Rg(A) = Rg(A^*) = 1 \ Coincidentes \end{cases}$$

- **De recta y plano:**

$$r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad y \ \pi \equiv a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \ y \ A^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 3 \ Secaantes \\ Rg(A) = 2 < Rg(A^*) = 3 \ Paralelos \\ Rg(A) = Rg(A^*) = 2 \ \text{Recta contenida en el plano} \end{cases}$$

- **De dos rectas:**

$$r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \ y \ s \equiv \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \ y \ A^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Rg(A) = 3 \ y \ Rg(A^*) = 4 \ Se \ cruzan \\ Rg(A) = Rg(A^*) = 3 \ Secantes \\ Rg(A) = 2 < Rg(A^*) = 3 \ Paralelas \\ Rg(A) = Rg(A^*) = 2 \ Coincidentes \end{cases}$$

Ángulos:

- **Entre dos planos:** menor de los dos ángulos determinados por dichos planos

$$\begin{cases} \pi \equiv ax+by+cz+d=0 \\ \pi \equiv a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \Rightarrow Cos\alpha = \frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

- **Entre una recta y un plano:** menor de los dos ángulos determinados por la recta y su proyección ortogonal sobre π

$$r \equiv \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \ \text{y} \ \pi \equiv ax+by+cz+d=0 \Rightarrow Sen\alpha = \frac{v_1a+v_2b+v_3c}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- **Entre dos rectas:** menor de los dos ángulos que determinan sus vectores directores

$$r \equiv \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \ \text{y} \ s \equiv \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} \Rightarrow Cos\alpha = \frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Distancias:

- **Entre dos puntos:**

$$P(x_0,y_0,z_0) \ \text{y} \ Q(x_1,y_1,z_1) \Rightarrow d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

- **De un punto a una recta:**

$$Q(x_1,y_1,z_1) \ \text{y} \ r \equiv \begin{cases} x = x_0+tv_1 \\ y = y_0+tv_2 \\ z = z_0+tv_3 \end{cases} \Rightarrow d(Q,r) = \frac{|PQ \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

- **De un punto a un plano:**

$$P(x_0,y_0,z_0) \ \text{y} \ \pi \equiv ax+by+cz+d=0 \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- **Entre dos rectas:**

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0+tv_1 \\ y = y_0+tv_2 \\ z = z_0+tv_3 \end{cases} \ \text{y} \ s \equiv \begin{cases} x = x_1+tu_1 \\ y = y_1+tu_2 \\ z = z_1+tu_3 \end{cases} \Rightarrow d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{PQ}\right]\right|}{|\vec{v}\times\vec{u}|}$$

Áreas y volúmenes:

- **Área de un paralelogramo:** $Área(A,B,C,D) = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

- **Área de un triángulo:** $Área(A,B,C) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|}{2}$

- **Volumen de un tetraedro:** $V(A,B,C,D) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}$

Superficie esférica: es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia r a un punto fijo c es constante

La ecuación de la esfera de radio r y centro $C(a,b,c)$ es $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$