MATRICES Y DETERMINANTES

Matriz: una matriz M de orden mxn es un conjunto de m.n números reales dispuestos en m filas y n columnas.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices:

- Matriz cuadrada: aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas. (m = n)
- Matriz diagonal: matriz cuadrada $/ a_{ii} \neq 0 \;\; y \;\; a_{ij} = 0 \;\; \forall i \neq j \;\; (a_{ii} \;\; diagonal \;\; principal)$.
- Matriz identidad: matriz diagonal $/ a_{ii} = 1$.
- Matriz triangular: aquella en la que todos los términos por encima de la diagonal principal son nulos (triangular inferior) o son nulos los términos por debajo de la diagonal principal (triangular superior).
- Matriz traspuesta de una matriz M_{mxn}, aquella que resulta de intercambiar filas por columnas M_{nxm}.

Igualdad de matrices: dos matrices son iguales cuando tienen el mismo orden y coinciden elemento a elemento.

Álgebra de matrices:

- Suma de matrices: sean $A, \;\; B \in M_{mxn}(\mathbb{R}) \;\; A = (a_{ij}) \;\; y \;\; B = (b_{ij}) \Rightarrow C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- Producto por un número: sean $A \in M_{mxn}(\mathbb{R}) \;\; A = (a_{ij}) \;\; y \;\; k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$
- Producto de matrices: $A, \;\; B \in M_{mxn}(\mathbb{R}) \;\; A = (a_{ij}) \;\; y \;\; B = (b_{ij}) \Rightarrow A \cdot B = (c_{ij}), \;\; donde \;\; c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Matriz inversa: sea $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden n, se llama matriz inversa de A, a otra matriz del mismo orden $A^{-1} / A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Calculo de la matriz inversa por el método de Gauss: consiste en aplicar transformaciones elementales a las filas de la matriz A de forma que se transforme en la matriz identidad, e ir aplicando esas mismas transformaciones a la matriz identidad que se transformará en A^{-1}.

Ecuaciones matriciales: ecuaciones en las que incógnitas son matrices.

Determinante de una matriz: es un número real que se asocia a la matriz A. **(Ver tabla de propiedades)**

Determinante de orden 2 y determinante de orden 3 (Regla de Sarrus):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Menor complementario de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A de orden n "α_{ij}": es el determinante de la matriz cuadrada de orden n-1 que resulta de suprimir la fila i y la columna j.

Adjunto de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

Matriz adjunta de una matriz cuadrada A "$Adj(A)$": resulta de sustituir cada elemento de A por su adjunto.

Desarrollo de una determinante: suma de los productos de cada uno de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.

Cálculo de la matriz inversa: $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|} \;\; con \;\; |A| \neq 0$

Menor de orden p: dada una matriz A , los menores de orden p de A son los determinantes de las submatrices cuadradas de A de orden p.

Rango de una matriz: número que expresa el orden del mayor menor no nulo de una matriz A.