LÍMITES Y CONTINUIDAD

Límite de una función en un punto: diremos que b es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al punto a, cuando sea cual sea el valor del número positivo ε, es posible encontrar otro número positivo σ, tal que si la distancia entre x y a es menor que σ, entonces la distancia entre $f(x)$ y b es menor que ε.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma > 0 / x \in (a-\sigma, a+\sigma) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

Límites laterales:

- Por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma > 0 / x \in (a-\sigma, a) \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$
- Por la derecha: $\lim_{x\to a^+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma > 0 / x \in (a, a+\sigma) \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Álgebra de límites:

- $\lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, $con \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

Límites infinitos: diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al punto a es $+\infty\ (-\infty)$, cuando sea cual sea el valor del número real K, es posible encontrar otro número positivo σ, tal que si la distancia entre x y a es menor que σ, entonces $f(x)$ es mayor (menor) que K.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists\sigma > 0 / x \in (a-\sigma, a+\sigma) - \{a\} \Rightarrow f(x) > K\ (f(x) < K)$$

Límites en el infinito: diremos que b es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty\ (-\infty)$, cuando sea cual sea el valor del número positivo ε, es posible encontrar un número real, K, tal que si x es mayor (menor) que K, entonces la distancia entre $f(x)$ y b es menor que ε.

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R} / x > K\ (x < K) \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

Límites infinitos en el infinito: diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty\ (-\infty)$ es $+\infty\ (-\infty)$, cuando sea cual sea el valor del número real K, es posible encontrar otro número real L, tal que si x es mayor (menor) que L, entonces f(x) es mayor (menor) que K.

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R} / x > L\ (x < L) \Rightarrow f(x) > K\ (< K)$$

Indeterminaciones: son de la forma $\dfrac{a}{0}, \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$

Continuidad: una función $f(x)$ es discontinua en un punto $x = a$ si verifica:

- Existe $f(x)$
- Existe $\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Continuidad en un intervalo: una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a, b), cuando es continua en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Discontinuidad: una función $f(x)$ es discontinua en un punto $x = a$, si la función no es continua en dicho punto.

- *Discontinuidad evitable:* existe el límite y éste es finito, pero el valor de la función en el punto o no existe o es diferente del valor del límite.
- *Discontinuidad de 1ª especie:* existen los límites laterales en el punto, pero toman valores diferentes o $\pm\infty$.
- *Discontinuidad de 2ª especie:* no existe uno de los límites laterales, o ambos