

DERIVADAS Y APLICACIONES

Tasa de variación media: sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$, la tasa de variación media de $f(x)$ en $[a, b]$ es $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, que es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Tasa de variación instantánea: sea $f(x)$ una función, la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en $x = a$, es $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, que es la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en dicho punto $x = a$.

Derivada de una función en un punto: sea $f(x)$ una función, se define la derivada de dicha función en un punto $x = a$ como $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, y su valor coincide con el de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en dicho punto $x = a$.

Derivadas laterales:

- Derivada lateral por la derecha de $f(x)$ en a : $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- Derivada lateral por la izquierda de $f(x)$ en a : $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = a$, las derivadas laterales han de existir y ser iguales.

Continuidad y derivabilidad: si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$, sin embargo el recíproco no tiene por qué ser cierto.

Función derivada: sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo (a, b) , entonces definimos $f'(x)$ como la función que asocia a cada punto de dicho intervalo su derivada.

Álgebra de derivadas:

- Derivada de una suma o resta: $f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
- Derivada de un producto: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- Derivada de un cociente: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
- Regla de la cadena: $y = f(u(x)) \Rightarrow y' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

(Ver tabla de derivadas)

Análisis de una función:

Dominio: conjunto de valores x para los cuales $f(x)$ existe o está definida: $D = \{x \in \mathbb{R} / \exists y = f(x)\}$

Simetrías:

- Función par: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ su gráfica es simétrica respecto al eje OY.
- Función impar: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Periodicidad: Una función $f(x)$ es periódica con período k , si verifica que $f(x) = f(x + nk)$, con k entero.

Corte con los ejes:

- Corte con el eje OX ($y = 0$): para hallarlos resolvemos la ecuación $f(x) = 0$.
- Corte con el eje OY ($x = 0$): para hallarlos hacemos $x = 0$ y sustituimos en $f(x)$.

Asíntotas:

- Vertical: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a$ *asíntota vertical*.
- Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Rightarrow y = l$ *asíntota horizontal*.
- Oblicua: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n$ *asíntota* $y = mx + n$ *asíntota oblicua*.

Crecimiento y decrecimiento:

- Una función es creciente en un intervalo (a, b) , si $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Una función es decreciente en un intervalo (a, b) , si $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, si $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Si $f(x)$ es derivable y creciente en $(a, b) \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$
- Si $f(x)$ es derivable y decreciente en $(a, b) \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$

Máximos y mínimos:

- Máximo: si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un máximo en x_0 .
- Mínimo: si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un mínimo en x_0 .

Concavidad y convexidad:

- Concavidad: una función $f(x)$ es cóncava en un intervalo cuando las tangentes a la curva en los puntos de dicho intervalo quedan por encima de la curva.
Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava en x_0 . Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava en x_0 .
- Convexidad: una función $f(x)$ es cóncava en un intervalo cuando las tangentes a la curva en los puntos de dicho intervalo quedan por encima de la curva. Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa en x_0 .

Puntos de inflexión: si $f'(x_0) = 0$ y $f(x)$ cambia su concavidad en $x_0 \Rightarrow f(x)$ tiene PI en x_0 .

Regiones: teniendo en cuenta los puntos de discontinuidad y los puntos de corte con el eje OX, podemos determinar las regiones donde $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.

Optimización: determinar la función a optimizar, y expresarla en función de una sola variable, calcular el máximo o el mínimo pedido imponiendo las condiciones necesarias en sus derivadas, y criticar la solución obtenida.