MATEMÁTICAS II

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de una u otra opción.

EXAMEN Nº 1 OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad x < 0 \\ x - a & si \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & si \; 1 \le x \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 0^-} ax^2 + b = b$$

$$\lim_{x \to 0^+} x - a = -a$$

$$\lim_{x \to 1^-} x - a = 1 - a$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{a}{x} + b = a + b$$

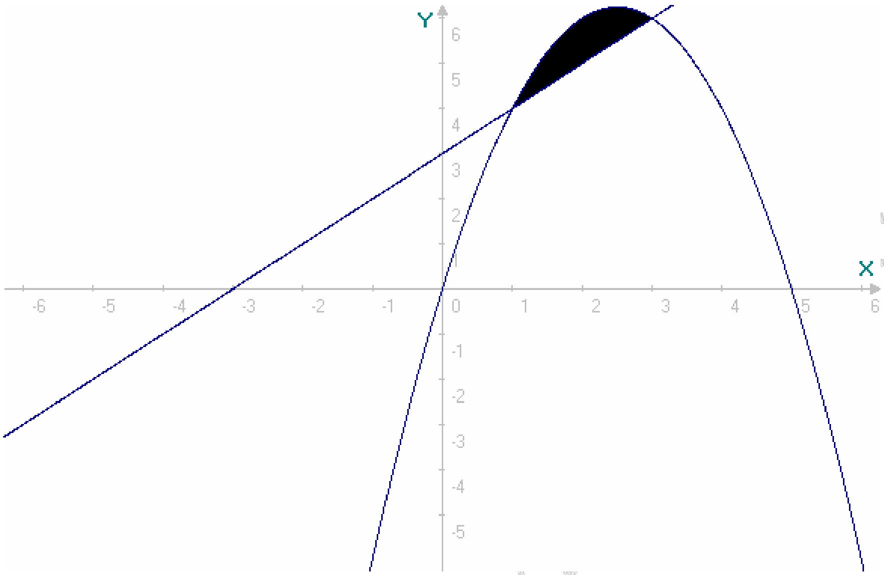
$$\begin{cases} b = -a \\ 1 - a = a + b \end{cases} \Rightarrow a = 1; \; b = -1$$

2. a) Dibujar el recinto plano limitado por las funciones:

$$f(x) = -x^2 + 5x, \;\; g(x) = x + 3$$

b) Hallar su área.

Solución:



Solución:

$$-x^2 + 5x = x + 3 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1; \; x = 3$$

$$\int_1^3 -x^2 + 5x - x - 3dx = \int_1^3 -x^2 + 4x - 3dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}$$

3. Discutir y resolver según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} 2x - y + z = m^2 \\ -x + 2y = 0 \\ mx - y + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$Si\ m \neq 2 \Rightarrow compatible\ \det er\min ado$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m^2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2m+4} = \frac{m^2-1}{-m+2};\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m^2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2m+4} = \frac{m^2-1}{-2m+4};\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & m^2 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2m+4} = \frac{-2m^3+m^2+3}{-2m+4}$$

$$Si\ m = 2 \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2^a\ fila + \frac{1}{2} 1^a\ fila \\ 3^a\ fila - 1^a\ fila \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA^* = 3 \Rightarrow$$

$$Incompatible$$

4. a) ¿Están alineados los puntos A(1,0,-1), B(-1,1,2) y C(3,0,1)? Justificar la respuesta.

b) En caso afirmativo determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,1,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2,0,2)$$

$$\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}\ son\ LI \Rightarrow no\ están\ alineados$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 5y - z - 2 = 0$$

EXAMEN Nº 2 OPCIÓN A

1. Representa gráficamente una función que satisfaga las siguientes condiciones:

$a)\ f(0)=0;\ f'(0)=0.$

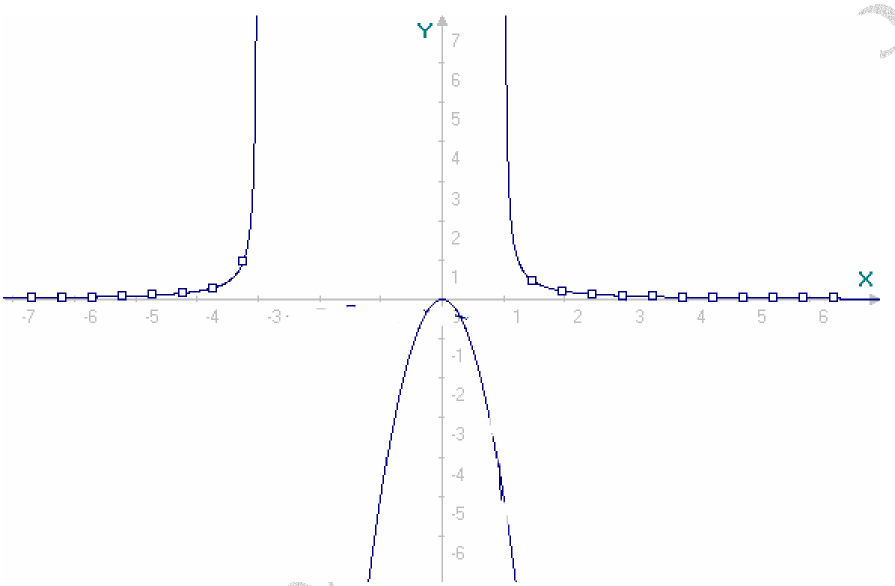
$b)\ \textit{Asíntotas vertical la recta } x=-3.$

$c)\ \textit{Creciente en } (-\infty,-3)\cup(-3,0).$

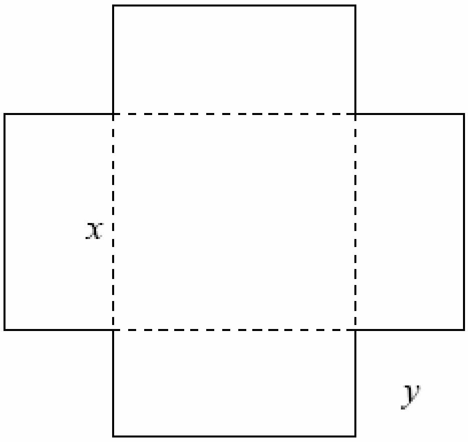
$d)\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

$e)\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

$f)\ \textit{Decreciente en } (0,1)\cup(1,\infty)$



2. Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 50 m^3 de volumen, que tenga superficie mínima.



Solución:

$$V = x^2 y = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{x^2}$$

$$A = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{50}{x^2} = x^2 + \frac{200}{x}$$

$$A' = 2x - \frac{200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{100}\ m;\ y = \frac{5}{\sqrt[3]{10}}\ m$$

3. a) Determinar para que valor de m tiene inversa la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular la matriz inversa para ese valor de m.

Solución:

$$|A| = 0 \Rightarrow -1 - 2m - m^2 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow tiene\ inversa\ si\ m \neq -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & (-m-2) & 1 \\ -m & 1 & m \\ -2m & 2 & (-1-m^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & -m & -2m \\ (-m-2) & 1 & 2 \\ 1 & m & (-1-m^2) \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\left(Adj(A)\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -m & -2m \\ (-m-2) & 1 & 2 \\ 1 & m & (-1-m^2) \end{pmatrix}}{-1-2m-m^2}$$

4. Hallar la ecuación del plano que contiene al punto A(0,-2,4) y a la recta de ecuación:

$$\frac{x+1}{2} = y - 3 = \frac{z+2}{-2}$$

Solución:

$$(2,1,-2)\ vector\ director\ de\ la\ recta\ y\ B(-1,3,-2)\ punto$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,5,-6)$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y+2 & 1 & 5 \\ z-4 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 14y + 11z - 16 = 0$$