MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5

PRUEBA A

1. Se hizo una encuesta aleatoria entre 130 estudiantes universitarios, de los cuales 85 eran mujeres, sobre el número de horas que estudian diariamente fuera del aula, obteniéndose una media de 3,4 horas.

a) Si la desviación típica es de 1,1 horas, obtener un intervalo de confianza, al 98%, para la media del número de horas que estudian diariamente fuera del aula los estudiantes universitarios.

b) Obtener un intervalo de confianza, al 90%, para la proporción de mujeres entre los estudiantes universitarios.

Solución:

a)

$$1-\alpha = 0.98 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$$

$$I = \left(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(3.4 - 2.33 \frac{1.1}{\sqrt{130}}, 3.4 + 2.33 \frac{1.1}{\sqrt{130}} \right) = (3.175,\ 3.625)$$

b)

$$n = 130;\ p = \frac{85}{130} = \frac{17}{26};\ q = \frac{9}{26}$$

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

$$B(n, p) \cong N(np, \sqrt{npq}) = N(85,\ 5.424)$$

$$I = \left(p - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right) = (0.6123, 0.6957)$$

2. Hace diez años, se hizo un amplio estudio y se concluyó que, como máximo, el 40% de los estudiantes universitarios eran fumadores. Para ver si actualmente se mantienen las mismas conclusiones, se tomó una muestra de 78 estudiantes entre los que 38 eran fumadores.

a) Con un nivel de significación del 10%, ¿Se acepta que el porcentaje de fumadores entre los universitarios es menor o igual que el 40%?

b) Se amplió la encuesta hasta 120 personas, y se obtuvo que 54 eran fumadores. Con un nivel de significación del 5%, ¿se tomaría la misma decisión que en el apartado anterior?

Solución:

a)

$H_0 : p \leq 0.4$

$H_1 : p > 0.4$

$$\left(-\infty,\, p_0 + Z_\alpha \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

$$n = 78;\ p = \frac{38}{78} = \frac{19}{39};\ q = \frac{20}{39}$$

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow Z_\alpha = 1.28$$

$$I = \left(-\infty,\, p_0 + Z_\alpha \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right) = \left(-\infty, 0.4 + 1.28\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{78}}\right) = \left(-\infty, 0.47\right)$$

$$p = \frac{38}{78} = 0.487 \notin \left(-\infty, 0.47\right)$$

no se acepta que el porcentaje de fumadores entre los universitarios es menor o igual que el 40%.

b)

$$n = 120;\ p = \frac{54}{120} = \frac{9}{20};\ q = \frac{11}{20}$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow Z_\alpha = 1.645$$

$$I = \left(-\infty,\, p_0 + Z_\alpha \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right) = \left(-\infty, 0.4 + 1.645\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{78}}\right) = \left(-\infty, 0.4735\right)$$

$$p = \frac{54}{20} = 0.45 \in \left(-\infty, 0.4735\right)$$

se acepta que el porcentaje de fumadores entre los universitarios es menor o igual que el 40%

3. En una pared azul de 8 metros de altura, se quiere pintar de blanco la figura que encierran las funciones $f(x) = -x^2 + 3x + 4 \;\; y \;\; g(x) = 2x^2 - 3x + 4$, ambas definidas en metros.

a) ¿Cuántos metros cuadrados hay que pintar de blanco?

b) Si la pared tiene 23 metros de longitud y se quiere repetir esa figura dejando 5 metros entre figura y figura, ¿cuánto costaría pintar las figuras, si cada metro cuadrado de blanco cuesta 2 euros?

Solución:

a)

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4 \;\; (parábola)$$

$$Corte\ con\ los\ ejes: \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4) \\ y = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow (-1,0),\ (4,0) \end{cases}$$

$$f'(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} Crece\ en\ \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \\ Decrece\ en\ \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)\ máximo$$

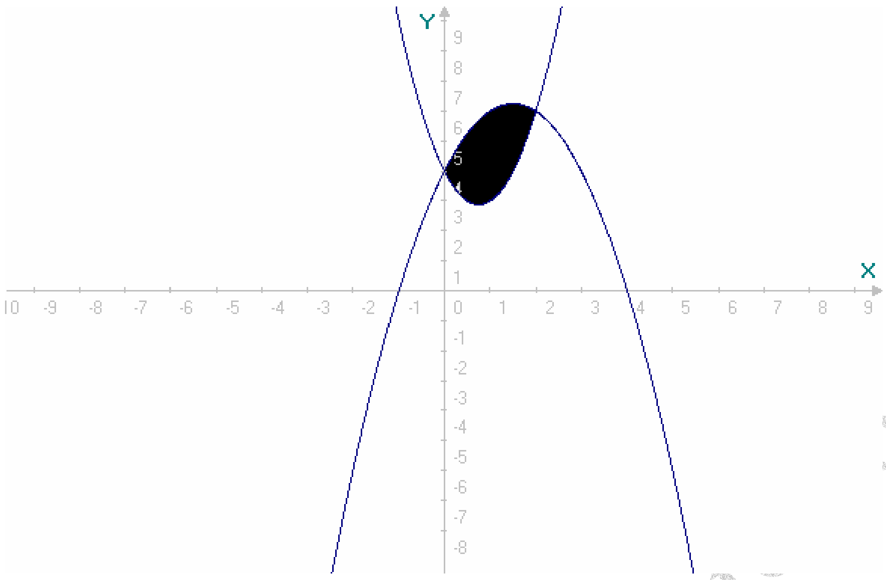
$$f''(x) = -2\ siempre\ cóncava$$

$$g(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

$$Corte\ con\ los\ ejes: \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4) \\ y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow no\ corta \end{cases}$$

$$f'(x) = 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} Crece\ en\ \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \\ Decrece\ en\ \left(\frac{3}{4}, \infty\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)\ mínimo$$

$$f''(x) = 4\ siempre\ convexa$$



Veamos los puntos de corte de ambas parábolas:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x + 4 \\ y = 2x^2 - 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 2; \Rightarrow (0,4)\ y\ (2,6)$$

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 3x + 4) - (2x^2 - 3x + 4)dx = \int_0^2 -3x^2 + 6x\, dx = \left[-3\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 4\ m^2$$

b) El ancho de la figura es 2 metros y la separación entre cada figura es 5 metros, luego a lo largo de 23 metros de longitud entrarían 4 figuras.

Las tres figuras suman 16 m^2, y si el m^2 cuesta 2 euros, pintar las tres figuras costaría 32 euros.

4. Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

a) ¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero?

b) ¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

Solución:

$a)$

$La\ portería\ es\ un\ rectángulo\ A = b \cdot a\ \ función\ a\ \max imizar$

$Además\ b + a + a = 10 \Rightarrow b + 2a = 10 \Rightarrow b = 10 - 2a$

$A = (10 - 2a)a = 10a - 2a^2$

$A' = 10 - 4a = 0 \Rightarrow a = 2.5m\ \ y\ \ b = 10 - 5 = 5\ m$

$b)$

$A = 5 \cdot 2.5 = 12.5m^2$

5. Juan, Pedro y Luis corren a la vez en un circuito. Por cada kilómetro que recorre Juan, Pedro recorre 2 kilómetros y Luis recorre tres cuartas partes de lo que recorre Pedro. Al finalizar, la suma de las distancias recorridas por los tres, fue de 45 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrió cada uno?

Solución:

$$x = Km\ que\ recorre\ Pedro$$
$$y = Km\ que\ recorre\ Juan$$
$$z = Km\ que\ recorre\ Luis$$

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ y = 2x \\ z = \dfrac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow x + 2x + \frac{3}{4}y = 45 \Rightarrow x + 2x + \frac{3}{2}x = 45 \Rightarrow x = 10\,Km;\ y = 20\,Km;\ z = 15\,Km$$

PRUEBA B

1. En un centro comercial se sabe que el 35% de los clientes pagan con tarjeta.

a) Si en una caja han pagado 120 clientes, ¿cuál es el número esperado de clientes que no han pagado con tarjeta?

b) Si en una caja han pagado 200 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que hayan pagado con tarjeta entre 60 y 85 clientes?

c) Si en una caja han pagado 400 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 260 no lo hayan hecho con tarjeta?

Solución:

a)

$$35 \cdot \frac{120}{100} = 42 \ \textit{pagan con tarjeta}$$

$$120 - 42 = 78 \ \textit{no pagan con tarjeta}$$

b)

$$B(n, p) \cong N\left(np, \sqrt{npq}\right) \Rightarrow B(200,\ 0.35) \cong N(70,\ 6.745)$$

$$P(60 \leq X \leq 80) \Rightarrow \textit{Tipificamos la variable } X \Rightarrow P\left(\frac{60-70}{6.745} \leq Z \leq \frac{85-70}{6.745}\right)$$

$$P(-1.483 \leq Z \leq 2.224) = P(Z \leq 2.224) - P(Z \leq -1.483) = P(Z \leq 2.224) - P(Z > 1.483)$$

$$P(Z \leq 2.22) - (1 - P(Z \leq 1.48)) = 0.9868 - (1 - 0.9306) = 0.9174$$

c)

$$B(n, p) \cong N\left(np, \sqrt{npq}\right) \Rightarrow B(400,\ 0.65) \cong N(260,\ 9.539)$$

$$P(X \geq 260) \Rightarrow \textit{Tipificamos la variable } X \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{260-260}{9.539}\right)$$

$$P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

2. En un país se sabe que la altura de la población se distribuye según una normal cuya desviación típica es igual a10 centímetros.

a) Si dicha media fuera de 170 centímetros, calcular la probabilidad de que la media muestral, de una muestra de 64 personas, difiera menos de un centímetro de la media de la población.

b) ¿Cuál es el tamaño muestral que se debe tomar para estimar la media de la altura de la población con un error menor de 2 centímetros y con un nivel de confianza del 95%.

c) Y si, en el apartado anterior, aumentamos el nivel de confianza al 99%, ¿qué tamaño muestral se necesitará?

Solución:

a)

$$N(170{,}1.25) \Rightarrow P(169 < \overline{X} < 171) = P\left(\frac{169-170}{1.25} < z < \frac{171-170}{1.25}\right) = 0.5762$$

b)

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 96.04 \cong 97$$

c)

$$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.575 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 165.766 \cong 166$$

3. En una máquina, en la que se ha roto el indicador de la longitud de las piezas que esta fabricando, se sabe que la desviación típica de la longitud de las piezas que produce es de 0,2 cm. Un trabajador cree que la máquina estaba regulada para fabricar piezas de una longitud media igual a 5 cm.

a) Si se toma una muestra de 16 piezas y se obtiene una media de 5,12 cm., con un nivel de significación del 5%, ¿se acepta la hipótesis del trabajador frente a la hipótesis de que la máquina estaba regulada para fabricar piezas de una longitud mayor?

b) Si la media muestral del apartado anterior se hubiese obtenido de una muestra de tamaño 36 y el nivel de significación fuera del 1%, ¿aceptaríamos la hipótesis del trabajador frente a la hipótesis de que la máquina está regulada para fabricar piezas de una longitud mayor?

Solución:

a)

$$H_0 : \mu \leq 5$$
$$H_1 : \mu > 5$$
$$\left(-\infty, \mu + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$5\% \Rightarrow Z_\alpha = 1.645 \Rightarrow I = \left(-\infty, 5 + 1.645\frac{0.2}{\sqrt{16}}\right) = \left(-\infty, 5.082\right)$$
$$5.12 \notin \left(-\infty, 5.082\right) \Rightarrow \textit{no se acepta}$$

$b)$

$$1\% \Rightarrow Z_\alpha = 2.33$$
$$I = \left(-\infty, 5 + 2.33\frac{0.2}{\sqrt{36}}\right) = \left(-\infty, 5.078\right) \Rightarrow 5.12 \notin \left(-\infty, 5.078\right) \textit{ tampoco se acepta}$$

4. Un comercio abre sus puertas a las nueve de la mañana, sin ningún cliente, y las cierra cuando se han marchado todos. La función que representa el número de clientes, dependiendo del número de horas que lleva abierto, es $C(h) = -h^2 + 8h$. El gasto por cliente decrece a medida que van pasando horas desde la apertura y sigue la función $g(h) = 300 - 25h$

a) ¿En que hora se produce la mayor afluencia de clientes?

b) ¿Cuánto gasta el último cliente?

c) ¿Cuando hay mayor recaudación, en la cuarta o en la quinta hora?

Solución:

a)

$$C(h) = -h^2 + 8h \Rightarrow C'(h) = -2h + 8 = 0 \Rightarrow h = 4$$
$$C''(h) = -2$$
$$\textit{Luego se trata de un máximo}$$

b)

$$C(h) = -h^2 + 8h = 0 \Rightarrow h(-h+8) = 0 \Rightarrow h = 0, h = 8$$
$$\textit{El comercio abre durante } 8h$$
$$g(8) = 300 - 25 \cdot 8 = 100$$

c)

$$g(4) = 300 - 25 \cdot 4 = 200$$
$$g(5) = 300 - 25 \cdot 5 = 175$$
$$\textit{En la cuarta hora}$$

5. Una tienda de café recibe 700 kilos de café natural y 800 kilos de café torrefacto. Envasa paquetes de un kilo con dos tipos de mezcla: el tipo A con medio kilo de café natural y medio kilo de café torrefacto, y el tipo B con un cuarto kilo de natural, y tres cuartos kilos de torrefacto. La ganancia por cada kilo de mezcla del tipo A es de un euro, y por cada kilo del tipo B es de dos euros. Determinar los paquetes de cada tipo de mezcla que deben prepararse para obtener la ganancia máxima.

Solución:

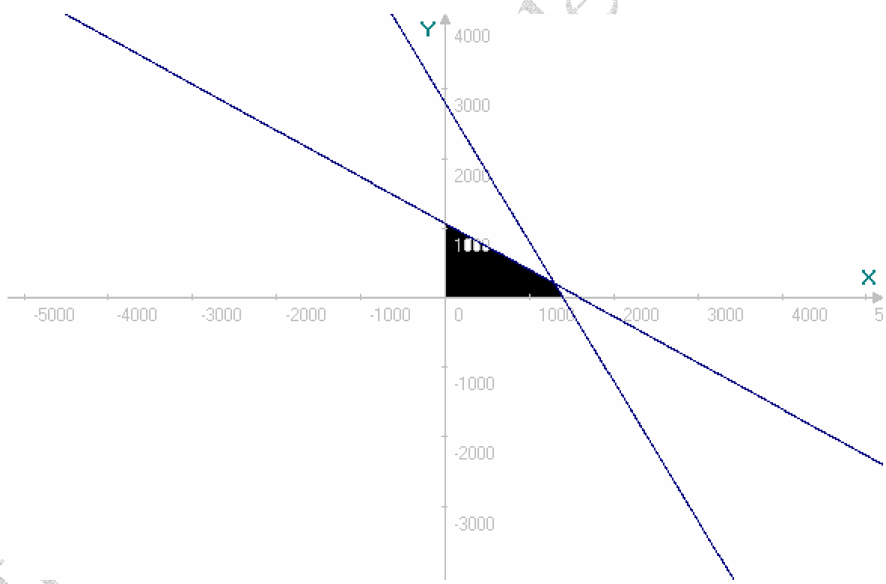
$x = paquetes\ del\ tipo\ A$

$y = paquetes\ del\ tipo\ B$

$\text{Re}\,stricciones:$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \le 700 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y \le 800 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y \le 2800 \\ 2x + 3y \le 3200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$Función\ objetivo:\ f(x, y) = x + 2y$



$Calculamos\ los\ vértices\ y\ valoramos\ la\ función\ objetivo:$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3200 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1066.66 \Rightarrow A = (0, 1066.66) \Rightarrow f(0, 1066.66) = 2133.32$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2800 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1400 \Rightarrow B = (1400, 0) \Rightarrow f(1400, 0) = 1400$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3200 \\ 2x + y = 2800 \end{cases} \Rightarrow 2y = 400 \Rightarrow y = 200;\ x = 1200 \Rightarrow C = (1200, 200) \Rightarrow f(1200, 200) = 1600$$

$Si\ la\ tienda\ pretende\ ofertar\ ambos\ tipos\ de\ café\ la\ solución\ es:$

$1\ paquetes\ tipo\ A\ y\ 1066\ tipo\ B$